Fungsi Gamma

Pengantar Matematika
Teknik Kimia

Muthia Elma

Fungsi Gamma

Defenisi

- Merupakan salah satu fungsi khusus yang biasanya disajikan dalam pembahasan kalkulus tingkat lanjut

- Dalam aplikasinya fungsi Gamma ini digunakan untuk membantu menyelesaikan integral-integral khusus yang sulit dalam pemecahannya dan banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan di bidang fisika maupun teknik.

- Pada dasarnya dapat didefinisikan pada bidang real dan kompleks dengan beberapa syarat tertentu.

Tujuan

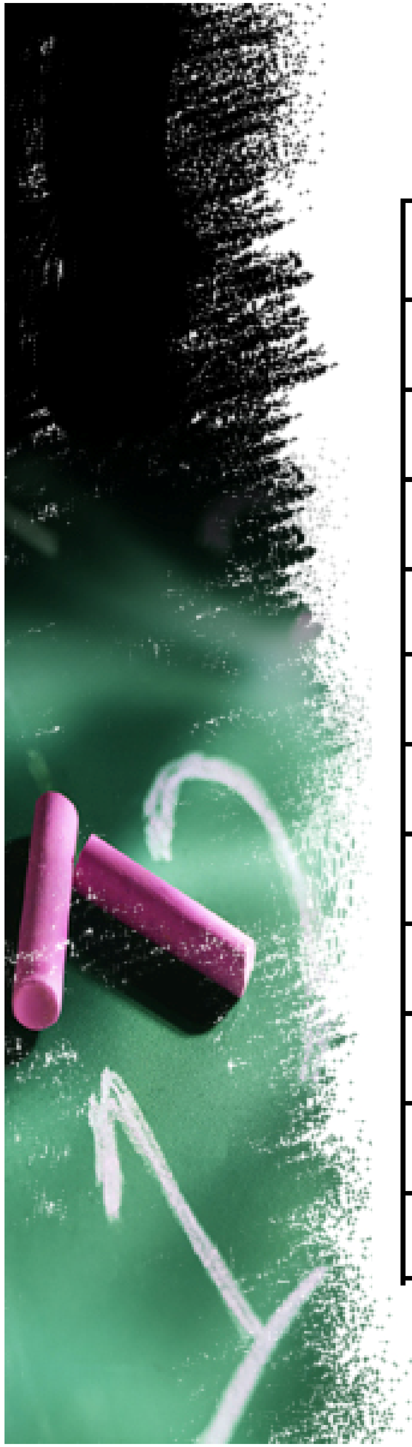
- Untuk mengklarifikasi sifat-sifat dasar fungsi Gamma tersebut agar mudah difahami dan mudah diaplikasikan di bidang matematika atau lainnya.

- Fungsi gamma dinyatakan oleh Γ (x) yang didefenisikan sebagai
- $$\Gamma(x) = \int_0^\infty r^{x-1} e^{-r}\, dr \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$
- x & r adalah bilangan real
- Rumus ini merupakan integral yang konvergen untuk x>0

- Rumus rekursif dari fungsi gamma
- $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{......(2)}$$
- Persamaan (2) harga $\Gamma(x)$ bisa ditentukan untuk semua $x>0$ bila nilai-nilai untuk $1 \leq x \leq 2$

- Jika x adalah bilangan bulat maka;

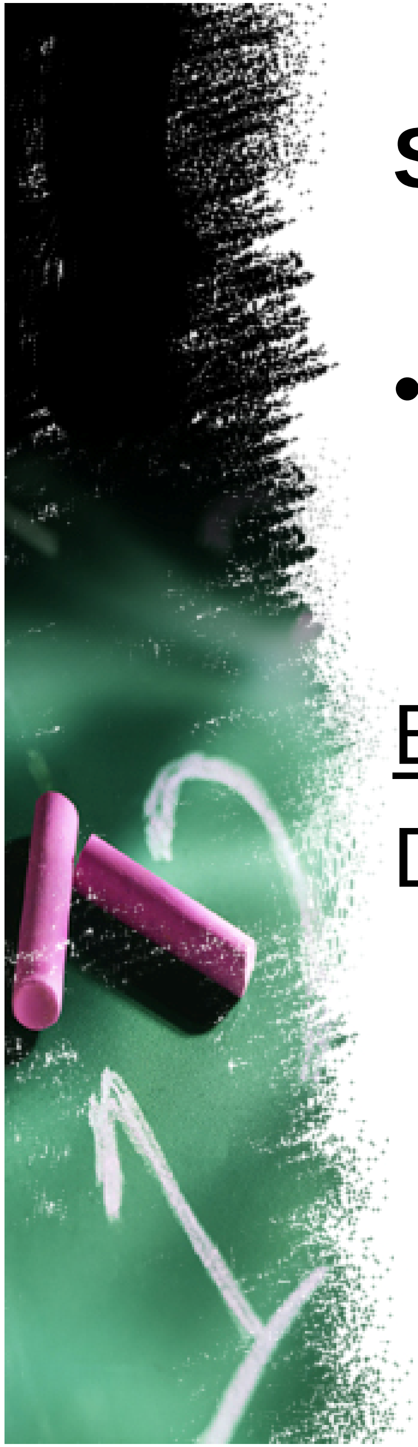
$$\Gamma(x+1) = x!$$



Tabel 1. Tabel fungsi Gamma

No.	x	$\Gamma(x)$
1.	1,0	1
2.	1,1	0,9513507699
3.	1,2	0,9181687424
4.	1,3	0,8974706963
5.	1,4	0,8872638175
6.	1,5	0,88622692555
7.	1,6	0,8935153493
8.	1,7	0,9086387329
9.	1,8	0,9313837710
10.	1,9	0,9617658319
11.	2,0	1

- Jika dikombinasikan persamaan (1) & (2), untuk x<0 diperoleh bentuk
- $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad \ldots\ldots(3)$$



Sifat dasar Fungsi Gamma Real

- Γ(x) tidak terdefenisi untuk setiap x=0 atau bilangan bulat negatif

<u>Bukti</u>

Dari pers (1) dengan x=0, diperoleh;

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty x^{-1} e^{-x} \, dx$$

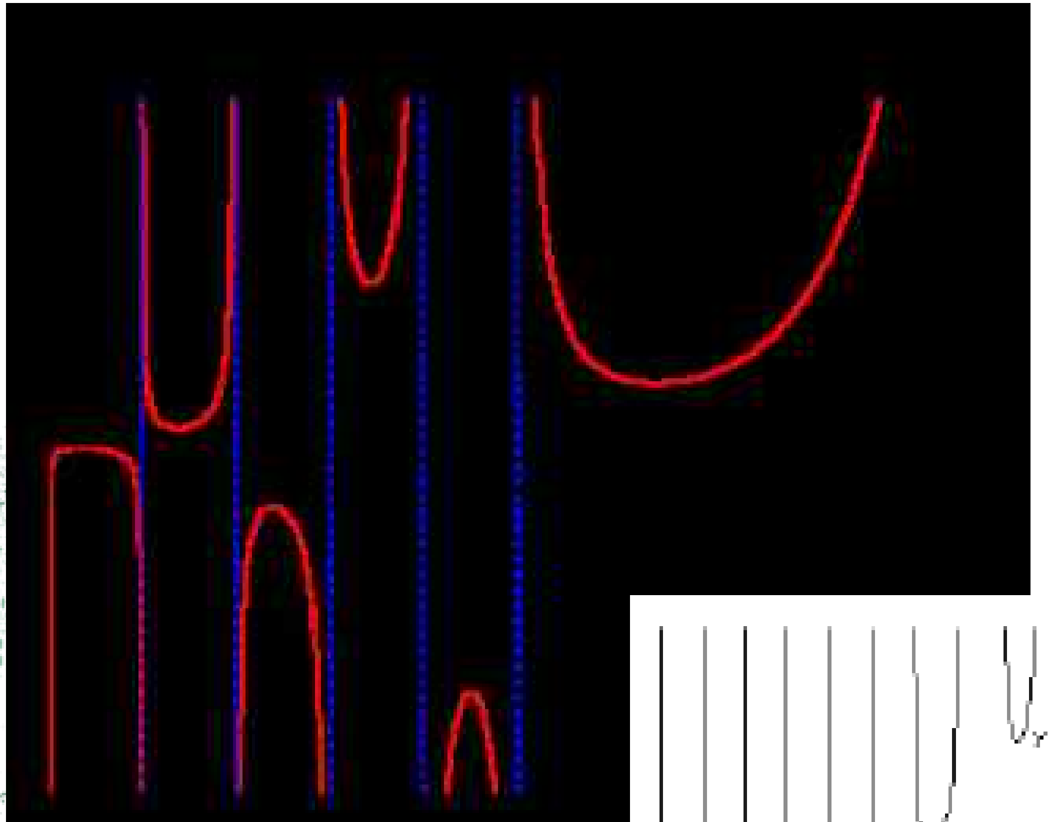
- Bukti tersebut merupakan integral divergen sehingga $\Gamma(0)$ tidak terdefenisi

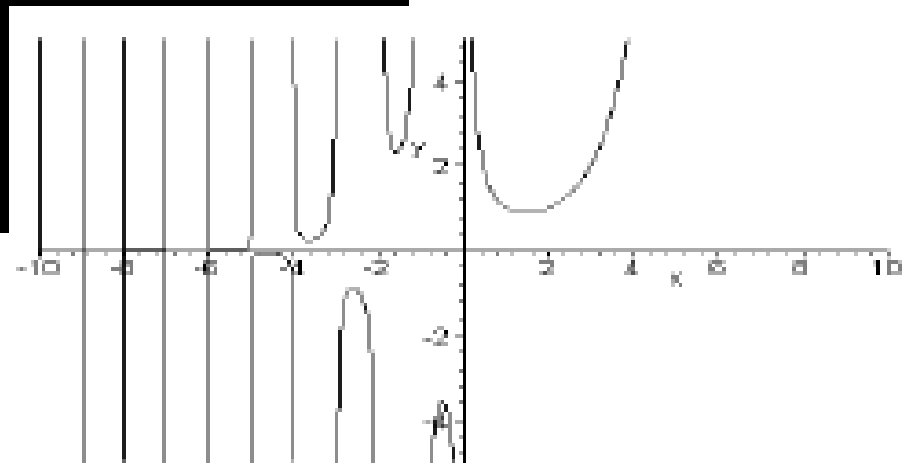
- Untuk x=n bilangan bulat negatif dan dengan mensubtitusikan x ke dalam persamaan (3), diperoleh:

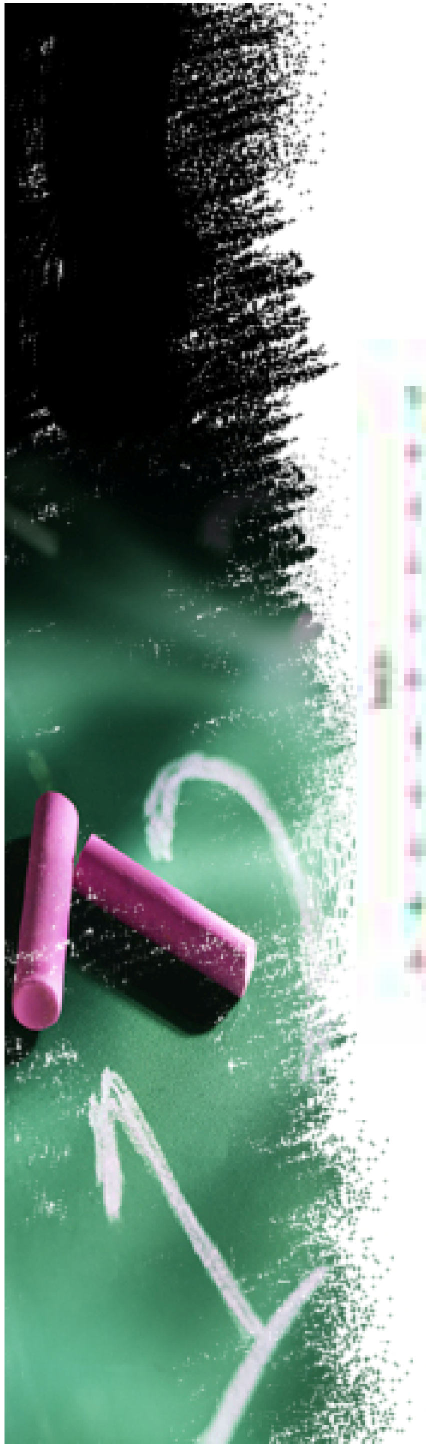
$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(0)}{n(n+1)(n+2)\ldots(-2)(-1)}$$

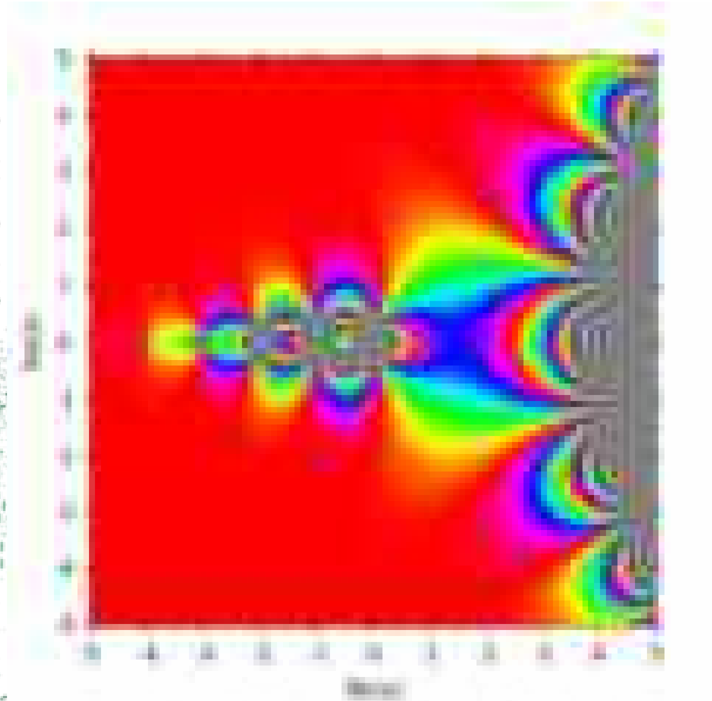
- Karena $\Gamma(0)$ tidak terdefenisi, maka $\Gamma(n)$ tidak terdefenisi pula untuk n bilangan bulat negatif

Grafik fungsi gamma

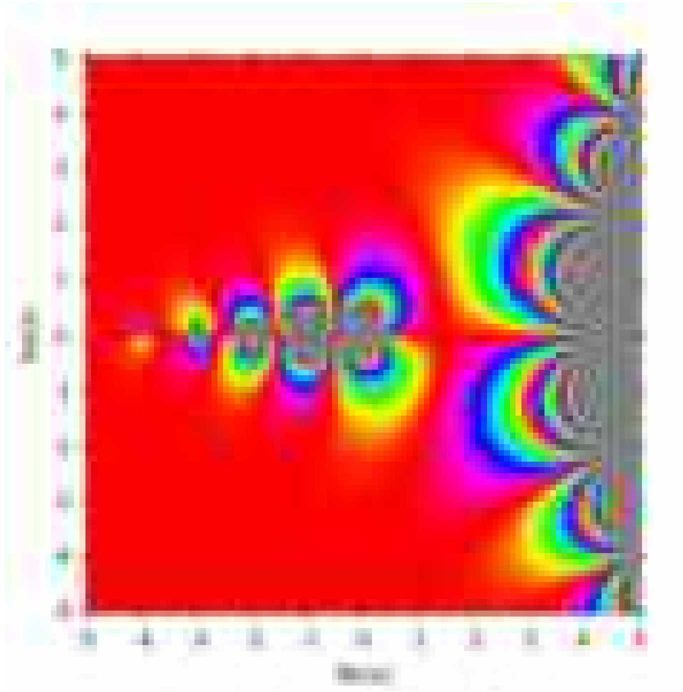








Bentuk nyata $\Gamma(z)$



Bentuk imaginer $\Gamma(z)$

- Jika n besar dan berupa bilangan bulat maka ditulis:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^{n} e^{-n}$$

- Bentuk ini dinamakan aproksimasi faktorial Stirling

Fungsi gamma bilangan kompleks

Notasi yang digunakan:

- $G(z) = \log \Gamma(z)$
- z=x+iy dengan x, y bil real dan I imaginer
- $O(y^{-n})$ menyatakan suku sisa pada deret Taylor atau galat pemotongan yang mempunyai orde n
- $Re(z) = Re(x+iy) = x$
- Ω_a adalah setengah bidang kompleks dengan $Re \{z\} > a$
- $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dengan u dan v masing-masing bagian real dan kompleks dari f

- ***Sifat 1***

(i). Jika $x \geq \frac{1}{2}$, maka $\mathrm{Re}\left(G''(x+iy)\right) > 0$ untuk setiap y real.

(ii). Jika $x < \frac{1}{2}$, maka $\mathrm{Re}\left(G''(x+iy)\right) < 0$ untuk setiap y real yang cukup besar.

Bukti :

Untuk membuktikan sifat-sifat tersebut kita mulai dari pernyataan (ii). Definisikan $\psi(s) = \frac{1}{2} - s$ pada selang $(0,1]$ dan $\psi(s+1) = \psi(s)$ untuk setiap s bilangan real.

Diketahui dua rumus Stirling berikut (*Ahern*, 1996)

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{\log 2\pi}{2} + \int_0^{\infty} \frac{\psi(s)}{s+z} dx$$

…………………(4)

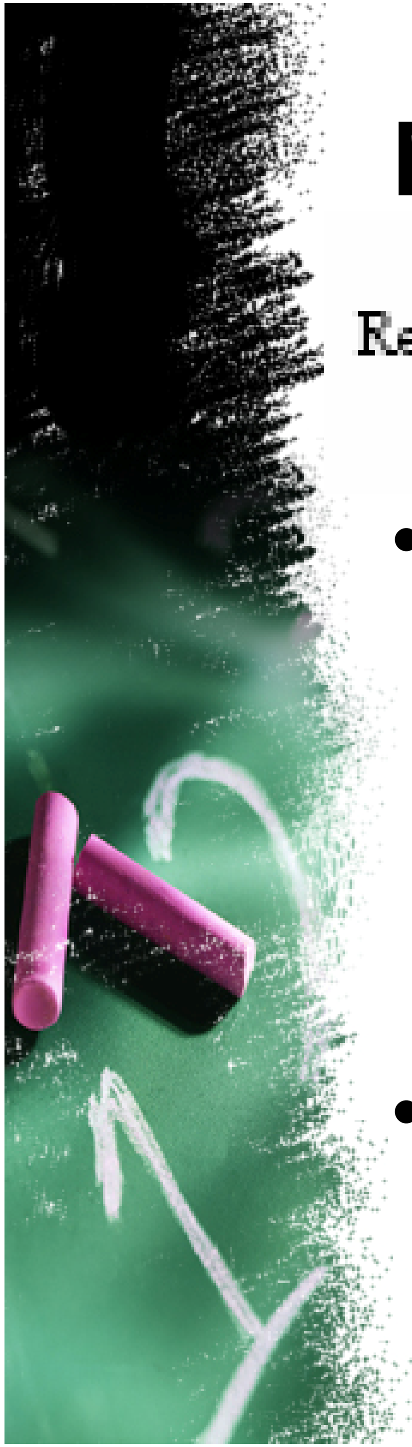
dengan $z \neq 0$ dan bukan bilangan real negatif. Kedua berbentuk integral parsial

$$G''(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + 6\int_0^{\infty} \frac{\varphi(s)}{(s+z)^4} ds$$

…………………(5)

dengan $\varphi(s) = \int_0^s \psi(t)dt$. Karena ψ mempunyai nilai rata-rata sama dengan 0, maka φ adalah periodik. Oleh sebab itu φ adalah terbatas.

Dalam kenyataannya, $0 \leq \varphi(s) \leq \frac{1}{8}$



Menurut Ahern (1996)

$$\mathrm{Re}\left(G''(x+iy)\right) \le \frac{2x^3 + x^2 + (2x-1)y^2}{2(x^2+y^2)^2} + \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{ds}{\left[(s+x)^2+y^2\right]^2}$$

- Jika y $\rightarrow\infty$ maka integral terakhir ini menurut Chapra dan Canale (1988) dapat dinyatakan dengan $O(y^{-3})$, yaitu suatu sisa pembulatan dan karena semakin mengecil, maka dapat diabaikan.
- Jika $2x - 1 \neq 0$, untuk x tertentu dan y besar,

Maka…..

$$\frac{2x^3 + x^2 + (2x-1)y^2}{2(x^2+y^2)^2} \quad \text{identik dengan} \quad (x - 1/2)y^{-2}$$

dan bernilai negatif bilamana $x < 1/2$.

Akibatnya $\mathrm{Re}(G''(x+iy)) < 0$ untuk $x < 1/2$

Jadi pernyataan (ii) terbukti.

Untuk membuktikan pernyataan (i), kita gunakan log agar dapat mengidentifikasi terlebih dahulu bentuk

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Dengan menurunkan dua kali bentuk ini, diperoleh hubungan :

$$G''(z)+G''(1-z)=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Karena $\sin\pi(1/2+iy)=\cos(\pi iy)=\cosh(\pi y)$, maka :

$$G''(1/2+iy)+G''(1/2-iy)=\frac{\pi^2}{\cosh^2(\pi y)}$$

- Atau

$$2\operatorname{Re}\left(G''(1/2+iy)\right)=\frac{\pi^2}{\cosh^2(\pi y)}>0 \qquad \text{........(6)}$$

- Dari persamaan (5) menunjukkan bahwa G’’ terbatas dalam Ω_δ untuk setiap $\delta > 0$
- Harga fungsi harmonik bentuk persamaan (6) terbatas pada domain setengah bidang, oleh sebab itu untuk setiap harga $x > 1/2$ dan y real berlaku $\mathrm{Re}(G''(1/2 + iy)) > 0$.

- Jadi pernyataan (i) terbukti.

Sifat 2

(i). Jika $\dfrac{1}{2} \le a < b$ maka $\arg\left(\dfrac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(a+iy)}\right)$ adalah fungsi monoton naik dari y pada selang $(-\infty, \infty)$.

(ii). Jika $0 \le a < \dfrac{1}{2}$ dan $b > 1-a$ maka $\arg\left(\dfrac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(a+iy)}\right)$ adalah fungsi monoton naik dari y pada selang $(-\infty, \infty)$.

Bukti (i):

- Diberikan u dan v masing-masing adalah bagian real dan imaginer dari $G = \log\Gamma$, maka v = arg(G) .
- Syarat perlu agar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik dalam suatu daerah di bidang komplek adalah harus memenuhi persamaan Cauchy-Riemann (*Sardi*, 1989), yaitu $x\ y\ u = v$.

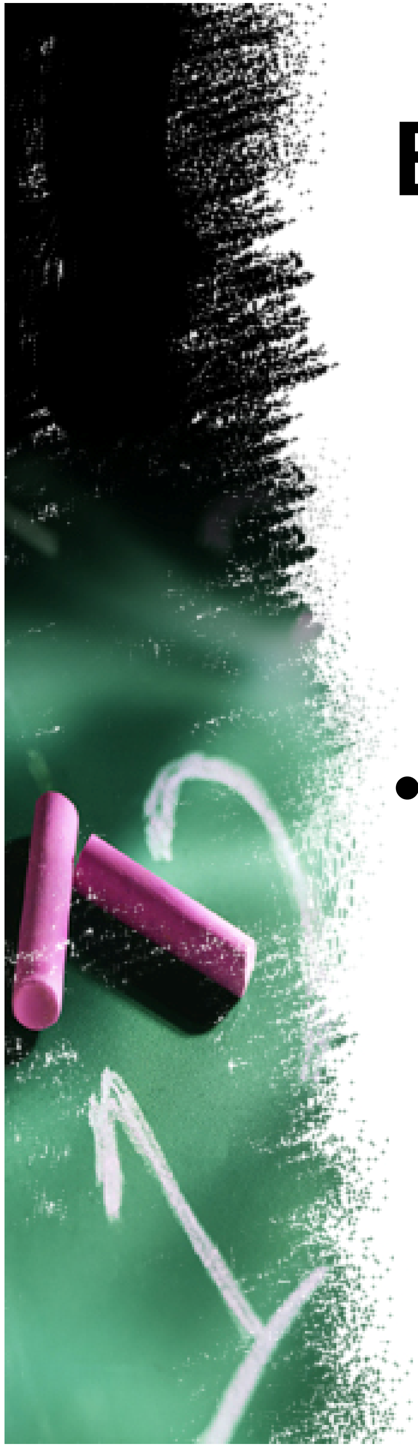
Oleh sebab itu berlaku $v_{xy} = u_{xx} > 0$ dalam $\overline{\Omega}_{1/2}$
(menurut sifat 1)

- Berarti

$$v_y(a+iy) < v_y(b+iy) \text{ , atau}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\arg\Gamma(a+iy) < \frac{\partial}{\partial y}\arg\Gamma(b+iy)$$

Jadi $\arg\left(\dfrac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(a+iy)}\right)$ merupakan fungsi yang monoton naik untuk y pada selang $(-\infty,\infty)$.



Bukti ii

$$\frac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(a+iy)} = \frac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(1-a+iy)} \cdot \frac{\Gamma(1-a+iy)}{\Gamma(a+iy)} \cdot \frac{\Gamma(a-iy)}{\Gamma(a-iy)}$$

$$= \frac{1}{\left|\Gamma(a+iy)\right|^2} \cdot \frac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(1-a+iy)} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi(a-iy)} \qquad \text{..........(7)}$$

- Jika 1- *a* > 1/ 2 dan (i) diberlakukan pada persamaan (7), maka diperoleh arctan[cot(πa) tanh(πy)], yang merupakan sebuah fungsi y yang monoton naik jika 0 < *a* < 1/ 2

Sifat 3

(i) Γ'/Γ adalah univalen dalam Ω_0, tetapi tidak lebih besar dari setengah bidang.

(ii). $\left|\mathrm{Im}(\Gamma'/\Gamma)(z)\right| < \dfrac{\pi}{2}$ dalam $\overline{\Omega}_{1/2}$.

Bukti (i)

Karena $(\Gamma'/\Gamma)' = G''$ berada dalam setengah bidang buka yang tidak memuat bilangan asli untuk setiap $z \in \Omega_{1/2}$ dan syarat cukup Γ'/Γ holomorfik pada $\Omega_{1/2}$ maka Γ'/Γ univalen pada $\Omega_{1/2}$. Diberikan $\Pi^+ = \{y > 0\}$ dan $\Pi^- = \{y < 0\}$ masing-masing di atas dan di bawah sumbu real. Jika $z \in \Omega_0 \cap \Pi^+$ maka $(n+z)^2 \in \Pi^+$ untuk setiap $n \geq 0$, sehingga $(n+z)^{-2} \in \Pi^-$ sedemikian hingga $G''(z) \in \Pi^-$. Akibatnya, $G''(z) \in \Pi^+$ jika $z \in \Omega_0 \cap \Pi^-$.

Berdasarkan Γ'/Γ yang univalen pada masing-masing kuadran $\Omega_0 \cap \Pi^+$ dan $\Omega_0 \cap \Pi^-$, maka Γ'/Γ memetakan $\Omega_0 \cap \Pi^+$ ke dalam Π^+ dan $\Omega_0 \cap \Pi^-$ ke dalam Π^-. Karena itu Γ'/Γ adalah naik tajam pada sumbu real positif. Oleh sebab itu Γ'/Γ adalah univalen untuk setiap Ω_0. Jadi pernyataan (i) terbukti.

Bukti (ii)

Penurunan $\left((\Gamma'/\Gamma)(x+iy)\right) = (u+iv)(x+iy)$ terhadap y memberikan :

$$iG''(x+iy) = (u_y + iv_y)(x+iy).$$

Dari persamaan (6) didapat $v_y = \mathrm{Re}(G'')$, sehingga persamaan tersebut menjadi :

$$v_y(1/2+iy) = \frac{\pi^2}{2\cosh^2(\pi y)}.$$

Jika kedua ruas kita integralkan diperoleh

$$v(1/2+iy) = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi y) \qquad (8)$$

Diketahui penurunan dari $\log\Gamma(z)$ adalah : $\dfrac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)e^{-z/n}$ dengan γ konstanta Euler (*Ahern*, 1990). Di lain fihak diketahui :

$$u(x+iy) = -\gamma - \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{n+x}{(n+x)^2+y^2}\right), \qquad (9)$$

$$v(x+iy) = \sum_{0}^{\infty}\frac{y}{(n+x)^2+y^2}, \qquad (10)$$

dan

$$G''(z) = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}$$

Pada ruas kanan persamaan (9) adalah fungsi naik pada y^2, jika $x > 0$. Untuk harga x tertentu akan mencapai minimum, bila y = 0. Jika kita turunkan persamaan (10), maka diperoleh :

$$v(x+iy) < \frac{y}{(x^2+y^2)} + \sum_{1}^{\infty} \frac{y}{(n^2+y^2)}$$

$$\mathrm{Im}(\Gamma'/\Gamma) = v(x+iy) < \frac{1}{2x} + \int_0^{\infty} \frac{y}{t^2+y^2}\,dt = \frac{1}{2x} + \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\mathrm{Im}(\Gamma'/\Gamma)\right| < \sqrt{\frac{1}{4x^2} + \frac{\pi^2}{4}}\,.$$

Karena Γ'/Γ dalam $\overline{\Omega}_{1/2}$ dan dengan mengambil modulus bagian imaginair pada persamaan (8), maka : $\left|\mathrm{Im}(\Gamma'/\Gamma)\right| < \dfrac{\pi}{2}$. Jadi pernyataan (ii) terbukti

Kesimpulan

- Fungsi Gamma $\Gamma(x)$ dari bilangan real x adalah konvergen untuk $x > 0$ dan divergen untuk harga-harga x nol atau bilangan bulat negatif.
- Fungsi Gamma dalam bidang kompleks $\Gamma(z)$menyatakan bahwa perbandingan antara turunan pertama fungsi Gamma dan fungsi tersebut adalah univalen dalam setengah bidang sisi kanan serta modulusnya tidak lebih dari π / 2 .

Fungsi Beta

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad ;x > 0, y > 0$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Sehingga :

B (x,y) = B(y,x)

- Jika x dan y di pandang sebagai koordinat di dalam sistem koordinat cartesius serta mentransformasikan ke dalam sistem koordinat polar dengan :

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$dxdy \quad menjadi \quad \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Persamaan sebelumnya menjadi:

$$m!n! = \lim_{0\to\infty} 2\int_0^a e^{-r^2} r^{2m+2n+3}\,dr \quad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta\, d\theta$$

$$m!n! = (m+n+1)!\,2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta\, d\theta$$

$$m!n! = (m+n+1)!\,\mathrm{B}(\mathrm{m}+1, n+1)$$

dengan

$$B(m+1, n+1) = 2\int_0^{2\pi} \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta\, d\theta$$

$$B(m+1, n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad \rightarrow \quad \textit{fungsi beta}$$

Jadi.....

$$B(n+1, m+1) = B(m+1, n+1)$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$